Topology Vol. 20, pp. 147–160
© Pergamon Press Ltd., 1981. Printed in Great Britain

0040-9383/81/0601-0147/$02.00/0

TYPE SIMPLE D'HOMOTOPIE ET VARIETES DE DIMENSION QUATRE CONTRACTILES

SAMI BERBERI

(*Received* 3 *May* 1978)

INTRODUCTION

DANS CE TRAVAIL, on construit des variétés de dimension quatre contractiles selon la méthode de Poenaru[10]. L'étude de leur type simple d'homotopie nous permet de répondre affirmativement à une question généralisée de de Rham[11, 12]. En étudiant les cobordismes de noeuds, étude commencée par Gordon[6], on peut répondre affirmativement à une question posée par lui [6; p. 165]. En même temps, on aura démontré, entre autres, que la sphère d'homotopie de Curtis[3] est une vraie sphère.

CHAPITRE I

§0. DEFINITIONS ET NOTATIONS

(1) On se place dans la catégorie P. L. Toutes les variétés seront compactes, connexes et orientées. X avec l'orientation inverse sera notée $-X$; son bord ∂X possèdera l'orientation induite. Pour le produit $X \times I$, on convient que $X \times \{1\}$ conserve l'orientation de X, ainsi $X \times \{0\}$ la renverse. On désigne les boules par B^n, D^n, Δ^n ou I^n, les sphères par S^n. On note simplement I^1 par I et Δ^2 par Δ.

(2) Les paires $L = (X, A)$ qu'on considèrera, seront propres si la dimension de A est strictement inférieure à celle de X. S'ils ont la même dimension, la variété compacte à bord X-(int $A \cup$ int$(\partial A \cap \partial X)$) sera notée par $X\backslash A$.

(3) Considérons un noeud $K = (S^3, S^1)$. Tout voisinage tubulaire fermé F de S^1 est homéomorphe à $S^1 \times D^2$. La variété $S^3\backslash S^1 \times D^2$ est appelée extérieur du noeud K et notée $A^3(K)$. Plaçons un point base $*$ sur $\partial A^3(K)$. $\pi_1(A^3(K), *)$ s'appelle groupe du noeud K. Par dualité d'Alexander, $H_1(A^3(K))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. L'homomorphisme de Hurewicz H: $\pi_1(A^3(K), *) \to H_1(A^3(K))$ associe à tout lacet son nombre d'enlacement avec S^1. Lorsque la trivialisation $F \to S^1 \times D^2$ est choisie de telle sorte que $H([S^1 \times \{*\}]) = 0$, le voisinage F sera dit standard[7].

(4) Considérons une paire (V^4, V^2) propre. Soit P un point de int V^2 et N^4 un voisinage de P. Si le type du noeud $(\partial N^4, \partial N^4 \cap V^2)$ est trivial, on dit que V est localement plat en P[4]. Prenons une boule B^4 et un noeud $K = (\partial B^4, S^1)$ sur son bord. K est dit "slice" s'il existe un plongement propre localement plat d'un disque B^2 dans B^4 avec $\partial B^2 = S^1$. Dans ce cas, B^2 admet un voisinage tubulaire dans B^4. Il est homéomorphe à $B^2 \times D^2$.

(5) Considérons un cobordisme de noeuds $C = (S^3 \times I, S^1 \times I)$. On note C^- pour $(S^3 \times \{0\}, S^1 \times \{0\})$ et C^+ pour $(S^3 \times \{1\}, S^1 \times \{1\})$. On suppose toujours que $S^1 \times I \subset S^3 \times I$ est localement plat. Ainsi $S^1 \times I$ admet un voisinage $S^1 \times I \times D^2$ tel que, pour $i = 0$, 1, $S^1 \times \{i\} \times D^2$ soit standard pour $(S^3 \times \{i\}, S^1 \times \{i\})$. On l'appelle voisinage standard de C. La variété $S^3 \times I\backslash S^1 \times I \times D^2$ sera appelée extérieur du cobordisme C et notée $A^4(C)$.

(6) Aussi, un noeud est "slice" s'il est cobordant au noeud trivial. On notera par O le noeud trivial. Soit un noeud $K = (S^3, S^1)$. Le cobordisme trivial entre K et lui-même sera noté par $c(K)$. Ainsi, $c(K) = K \times I = (S^3, S^1) \times I$. Lorsqu'on veut préciser dans un

cobordisme C le noeud C^- et le noeud C^+, on le note par $c(C^-, C^+)$; e.g. $c(K)$ est un $c(K, K)$ particulier.

(7) On paramètre S^1 par sa coordonnée angulaire θ et D^2 par ses coordonnées polaires (r, θ). Une matrice d'entiers relatifs $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de déterminant -1 définit un difféomorphisme $A: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ par $A(\theta, \varphi) = (\alpha\theta + \beta\varphi,\ \gamma\theta + \delta\varphi)$. Les seules matrices qui se prolongent en des difféomorphismes de $D^2 \times S^1$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \epsilon & \beta \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ avec $(\epsilon, \eta) \in \{-1, 1\}^2$, le prolongement étant:

$$A((r, \theta), \varphi) = ((r,\ \epsilon\theta + \beta\varphi), \eta\varphi).$$

(8) Etant donné φ, élément de S^1, il définit une rotation sur S^2, notée $R(\varphi)$, autour de ses pôles, d'un angle φ. R définit une application de $S^1 \to \mathrm{SO}_3$ qui représente l'élément non trivial de $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}_2$.

Soit:

$$T_\delta: S^2 \times S^1 \to S^2 \times S^1$$
$$(x, \varphi) \mapsto (R(\delta\varphi)(x), \varphi)$$

Pour δ pair, T_δ est isotope à l'identité (qui est T_0); pour δ impair, T_δ est isotope à T_1. T_1 n'est pas isotope à T_0[5].

(9) On note un collapsing par $\searrow$, une expansion élémentaire par $\overset{e}{\nearrow}$ [15].

§1. CONSTRUCTION DE $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$

(a) Considérons une boule B_1^4 et un noeud "slice" K_1 sur son bord: $K_1 = (S_1^3, S_1^1)$, S_1^3 étant ∂B_1^4. Soit Δ_1 un disque (de dimension deux) plongé proprement dans B_1^4, localement plat et de bord $\partial\Delta_1 = S_1^1$ (il existe, car K_1 est slice). Soit F un voisinage tubulaire fermé de Δ_1 dans B_1^4. Soit $\Delta_1 \times D_1^2$ une trivialisation quelconque de F. Notons $\Delta_1 \times D_1^2$ par Δ_1^4. $\partial\Delta_1 = S_1^1$ est noué dans S_1^3, de noeud K_1. La paire (Δ_1^4, Δ_1) n'est pas nouée. Ainsi $(\partial\Delta_1^4, \partial\Delta_1)$ est trivial. La trivialisation $\partial\Delta_1 \times D_1^2$ est alors standard.

(b) Considérons une boule B_2^4 et un noeud $K_2 = (S_2^3, S_2^1)$ sur son bord, S_2^3 étant ∂B_2^4. Soit $S_2^1 \times D_2^2$ un voisinage tubulaire standard de K_2.

(c) Soit un difféomorphisme $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de déterminant -1,

$$A: \Delta_1 \times \partial D_1^2 \to S_2^1 \times D_2^2.$$

A est nécessairement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$.

(d) On définit $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$ par: $(B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{smallmatrix}\right)}{\cup} B_2^4$.

Cas particulier

Considérons un noeud $K_0 = (S_0^3, S_0^1)$. Soit $(B_0^3, B_0^1) \subset (S_0^3, S_0^1)$, une paire non nouée. Soit $(B_1^3, B_1^1) = (S_0^3 \backslash B_0^3, S_0^1 \backslash B_0^1)$. Prenons B_1^4 pour $B_1^3 \times I$ et Δ_1 pour $B_1^1 \times I$. B_1^1 admet un voisinage tubulaire dans B_1^3, d'où Δ_1 est localement plat dans B_1^4. Remarquons que (S_1^3, S_1^1) n'est autre que $K_0 \# -K_0$ et Δ_1 est un disque particulier l'engendrant. Dans ce cas, la variété $V(K_0 \# - K_0, \Delta_1, K_2; \delta)$ sera notée par $U(K_0 \# - K_0, K_2; \delta)$.

Considérons la paire $(B_1^4, \Delta_1) = (B_1^3 \times I, B_1^1 \times I)$. Son double est le noeud de dimension deux (S^4, S^2) qu'on appelle "spin" de K_0. La paire (B_1^4, Δ_1) s'appelle "moitié-spin" de K_0.

Soit $\Delta_1^4 = \Delta_1 \times D_1^2$ un voisinage standard de Δ_1. $B_1^4 \backslash \Delta_1^4 = B_1^3 \times I \backslash B_1^1 \times I \times D_1^2$, et, dans ce cas, c'est $(B_1^3 \backslash B_1^1 \times D_1^2) \times I$. Remarquons que $B_1^3 \backslash B_1^1 \times D_1^2$ n'est autre que $A^3(K_0)$. Ainsi $B_1^4 \backslash \Delta_1^4$ est $A^3(K_0) \times I$.

Remarques. (1) Lorsque $K_2 = O$, la variété $V(K_1, \Delta_1, O; \delta)$ est obtenue en enlevant d'une boule B_1^4 une autre Δ_1^4 puis en la remettant différemment.

(2) La variété V^4 construite par Poenaru[10] n'est autre que $U(\tau \# - \tau, \tau \# - \tau; 0)$, τ étant l'un des trèfles; les variétés construites par de Rham[11, 12] sont $U(\tau \# - \tau, O; \delta)$.

§2. BORD DE $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$

Les variétés $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$ sont compactes, connexes, de dimension quatre et à bord.

(a) Construction de $M(K_1, K_2; A)$ [6]

Considérons deux noeuds, $K_i = (S_i^3, S_i^1)$ $(i = 1, 2)$. Soit $S_i^1 \times D_i^2$ un voisinage tubulaire standard de K_i. $\partial A^3(K_i)$ est $S_i^1 \times \partial D_i^2$.

Soit A une matrice d'entiers de déterminant -1: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. A définit un difféomorphisme de $S_1^1 \times \partial D_1^2$ dans $S_2^1 \times \partial D_2^2$. On définit $M(K_1, K_2; A)$ par $A^3(K_1) \underset{A}{\cup} A^3(K_2)$.

Ces variétés sont compactes, connexes, sans bord et de dimension trois. Lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$, on note $M(K_1, K_2; A)$ par $M(K_1, K_2; \delta)$ et A par δ.

(b) Bord des V

PROPOSITION I.1 $\partial V(K_1, \Delta_1 K_2; \delta) = M(K_1, K_2; \delta)$.

La démonstration repose sur le lemme évident suivant:

LEMME I.2. *Considérons deux variétés X_1 et X_2. Soit $Y_i \subset \partial X_i$ $(i = 1, 2)$. Soit h un homéomorphisme renversant l'orientation, de Y_1 dans Y_2. Alors*

$$\partial(X_1 \underset{h}{\cup} X_2) = (\partial X_1 \backslash Y_1) \underset{h'}{\cup} (\partial X_2 \backslash Y_2)$$

où h': $\partial Y_1 \to \partial Y_2$ est la restriction de h à ∂Y_1.

En effet, il suffit de prendre: $X_1 = B_1^4 \backslash \Delta_1^4$, $Y_1 = \Delta_1 \times \partial D_1^2$, $X_2 = B_2^4$ et $Y_2 = S_2^1 \times D_2^2$.

(c) Etude de $M(K_1, K_2; A)$

Pour une étude plus détaillée, voir[6].

(a) Le (§0; 7) donne $M(O, K_2; \delta) = S^3$. En remarquant que $M(K_1, K_2; A) = M(K_2, K_1; A^{-1})$, on aura:

ASSERTION I.3. $M(O, K_2; \delta) = M(K_1, O; 0) = S^3$.
Sont-ils les seuls cas où l'on obtient S^3? On a conjecturé:

Conjecture [1]. Pour K_1 non trivial, $\pi_1(M(K_1, O; \delta)) = \{0\} \Rightarrow \delta = 0$. Cette conjecture n'est pas encore résolue, mais elle est vraie pour plusieurs types de noeuds.

LEMME I.4. [1]. *K_0 étant non trivial*: $\pi_1(M(K_0\# - K_0, O; \delta)) = \{0\} \Rightarrow \delta = 0$.

(b) L'injection canonique c_i: $\partial A^3(K_i) \subset A^3(K_i)$ induit une application c_{i*} sur leur groupe d'homotopie; c_{i*}: $\pi_1(\partial A^3(K_i)) \to \pi_1(A^3(K_i))$ vérifie le lemme capital suivant.

LEMME I.5 [6]. *K_i non trivial $\Leftrightarrow c_{i*}$ injectif.*

En utilisant le théorème de van Kampen, on en déduit:

LEMME I.6. *K_1 et K_2 non triviaux* $\Rightarrow \pi_1(M(K_1, K_2; A)) \neq \{0\}$.

Comme première réciproque à l'assertion I.3, on aura:

ASSERTION I.7. $M(K_0\# - K_0, K_2; \delta) = S^3 \Leftrightarrow K_0 = O$ *ou bien* $K_2 = O$ *et* $\delta = 0$

CHAPITRE II

§1. CONTRACTIBILITE DE $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$

Soit S_m un méridien de K_1. Son image par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$ est une longitude de K_2. Notons-la par S_l. Son nombre d'enlacement avec K_2 est δ.

LEMME II.1. $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) \searrow (B_1{}^4 \backslash \Delta_1{}^4) \underset{S_m}{\cup} D^2$.

La démonstration repose sur le:

LEMME II.2 [14]. (*a*) *L étant un sous-complexe du complexe R, $v(X)$ désignant le cône au-dessus de X, on a*: $v(R) \searrow v(L)$. (*b*) *Si, en plus, $R \searrow L$, on a aussi*: $v(R) \searrow R \cup v(L)$.

Démonstration du Lemme II.1.
(1) On peut supposer $B_2{}^4 = v(S_2{}^3)$, le sommet du cône étant le centre de $B_2{}^4$. $S_2{}^1 \times D_2{}^2$ étant un sous-complexe de $S_2{}^3$, on aura, d'après le (a) du lemme précédent:

$$v(S_2{}^3) \searrow v(S_2{}^1 \times D_2{}^2).$$

(2) $S_2{}^1 \times D_2{}^2$ se collapse sur toute longitude, en particulier sur S_l. Et, d'après le (b) du lemme précédent, on aura:

$$v(S_2{}^1 \times D_2{}^2) \searrow S_2{}^1 \times D_2{}^2 \cup v(S_l).$$

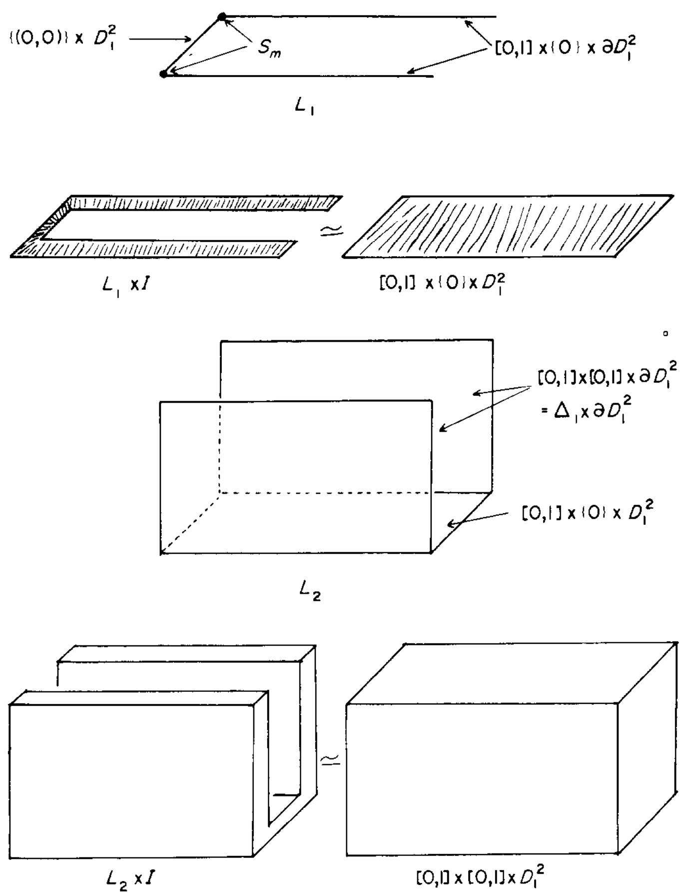

Fig. 1.

(3) L'attachement $S_2^1 \times D_2^2$ n'ayant pas été touché, on aura:

$$V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) \searrow [(B_1^4 \backslash \Delta_1^4)] \underset{\delta}{\cup} [S_2^1 \times D_2^2 \underset{S_l}{\cup} v(S_l)]$$

Le second membre est $(B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{\delta}{\cup} v(S_l)$. $v(S_l)$ est un 2-disque; notons-le par D^2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}^{-1} (S_l)$ étant S_m, le second membre est aussi $(B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{S_m}{\cup} D^2$.

Comme application, on aura:

Proposition II.3. $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) \times I^2 = I^6$.

D'après le théorème suivant, il suffit de démontrer que $V \times I^2$ est collapsible.

Théorème de Whitehead [14]. *Une variété est collapsible si et seulement si elle est une boule.*

(1) *Remarquons que* $B_1^4 = (B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{\Delta_1 \times \partial D_1^2}{\cup} \Delta_1^4$.

(2) *Paramétrons* Δ_1 *par* $[0, 1] \times [0, 1]$. *Choisissons* $S_n = \{(0, 0)\} \times \partial D_1^2$. *On peut ainsi supposer que* $D^2 = \{(0, 0)\} \times D_1^2$. *Posons*:

$$R_1 = (B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{\{(0,0)\} \times \partial D_1^2}{\cup} \{(0, 0)\} \times D_1^2.$$

D'après le Lemme II. 1, *on a*: $V \searrow R_1$.

(3) *Exprimons que l'on passe de* R_1 *à* B_1^4 *par deux expansions élémentaires. Soient* (*voir Fig.* 1):

$$L_1 = \{(0,0)\} \times D_1^2 \underset{\{(0,0)\}\times \partial D_1^2}{\cup} [0,1] \times \{0\} \times \partial D_1^2$$

$$R_2 = (B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{[0,1]\times\{0\}\times \partial D_1^2}{\cup} [0,1] \times \{0\} \times D_1^2$$

$$L_2 = [0,1] \times \{0\} \times D_1^2 \underset{[0,1]\times\{0\}\times \partial D_1^2}{\cup} [0,1] \times [0,1] \times \partial D_1^2$$

[$R_1 \overset{e}{\nearrow} R_2$ (L_1 étant la face d'expansion) et $R_2 \overset{e}{\nearrow} B_1^4$ (L_2 étant la face d'expansion)]

En utilisant deux fois le lemme suivant:

LEMME II.4[2]. *L étant un sous-complexe du complexe R, alors*

$$R \times I \searrow (R \times i) \cup L \times I \; (i = 0, 1),$$

on aura:

$$R_1 \times I \searrow R_1 \cup (L_1 \times I) \simeq R_2$$
$$R_2 \times I \searrow R_2 \cup (L_2 \times I) \simeq B_1^4.$$

(4) Ainsi,

$$\begin{aligned} V \times I^2 &\searrow R_1 \times I^2 = (R_1 \times I) \times I \\ &\searrow R_2 \times I \\ &\searrow B_1^4 \\ &\searrow pt. \end{aligned}$$

COROLLAIRE II.5. Les $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$ *sont contractiles.*

Remarque. Il suit du théorème de van Kampen que $\pi_1 V = 1$ et de la suite de Mayer–Vietoris que $\tilde{H}_* V = 0$ d'où les V sont contractiles. La Proposition II.3 résultera de la conjecture de Poincaré en dimension 6. Notre preuve n'utilise pas cette conjecture; la même idée géométrique nous permettra de prouver la Proposition II.7.

§2. CONTRACTIBILITE DE $U(K_0\# - K_0, K_2; \delta)$

Les variétés U sont des V où $K_1 = K_0\# - K_0$ et $(B_1^4 \backslash \Delta_1^4)$ est $A^3(K_0) \times I$. Paramétrons Δ_1 par $[0,1] \times I$. Là, $S_m = \{(0,0)\} \times \partial D_1^2$ serait dans $A^3(K_0) \times \{0\}$.

LEMME II.6. $U(K_0\# - K_0, K_2; \delta) \searrow A^3(K_0) \times \{0\} \underset{S_m}{\cup} D^2$.

En effet, d'après le Lemme II.1, $U(K_0\# - K_0, K_2; \delta) \searrow (B_1^4 \backslash \Delta_1^4) \underset{S_m}{\cup} D^2$. S_m étant dans $A^3(K_0) \times \{0\}$, on peut faire le collapsing de $(B_1^4 \backslash \Delta_1^4) = A^3(K_0) \times I$ sur la base $A^3(K_0) \times \{0\}$, d'où le lemme.

PROPOSITION II.7. $U(K_0\#-K_0, K_2; \delta)\times I = I^5$.

Il suffit d'appliquer une seule fois le Lemme II.4, en prenant:

$$R_1 = A^3(K_0)\times\{0\} \underset{\{(0,0)\}\times\partial D_1^2}{\cup} \{(0,0)\}\times D_1^2$$

et

$$L_1 = \{(0,0)\}\times D_1^2 \underset{\{(0,0)\}\times\partial D_1^2}{\cup} [0,1]\times\{0\}\times\partial D_1^2.$$

(Remarquons qu'on passe de R_1 à B_1^3 en une seule expansion élémentaire, la face d'expansion étant L_1.)

D'après le Lemme II.6, $U \searrow R_1$.

$$\begin{aligned} U\times I &\searrow R_1\times I \\ &\searrow R_1 \cup (L_1\times I) \simeq B_1^3 \\ &\searrow pt. \end{aligned}$$

Remarque. La Proposition II.7 résout une question généralisée de de Rham[11, 12]. Celui-ci démontre que, pour δ pair, $U(K_0\#-K_0, O; \delta)\times I^1 = I^5$. Gordon[6] le prouve pour δ impair; sa démonstration ne se généralise pas pour K_2 quelconque.

PROPOSITION II.8. $U(K_0\#-K_0, K_2; \delta)$ se collapse sur un spine de dimension deux.

En effet, d'après le Lemme II.6, $U(K_0\#-K_0, K_2; \delta)\searrow A^3(K_0) \underset{S_m}{\cup} D^2$. Triangulons S_m et $A^3(K_0)$. Il existe une subdivision de la triangulation de $A^3(K_0)$ contenant une subdivision de celle de S_m. $A^3(K_0)$ étant une variété à bord, faisons dans la nouvelle triangulation le collapsing des 3-simplexes. S_m ne sera pas touché. $A^3(K_0)$ se collapse sur un spine de dimension deux, $A^3(K_0) \underset{S_m}{\cup} D^2$ aussi.

ASSERTION II.9. $U(O, K_2; \delta) = B^4$.

En effet, $U(O, K_2; \delta)$ se collapse sur $A^3(O) \underset{S_m}{\cup} D^2$. Or, $A^3(O)\searrow S_m$, d'où:

$$U(O, K_2; \delta)\searrow D^2 \searrow pt.$$

PROPOSITION II.10. $U(K_0\#-K_0, K_2; \delta) = B^4 \Leftrightarrow K_0 = O$ *ou bien* $K_2 = O$ *et* $\delta = 0$.

$\Rightarrow$Elle résulte de la Proposition I.1 et de l'Assertion 1.7.
$\Leftarrow$(1) Pour $K_0 = O$, c'est l'assertion II.9 (2) pour $K_2 = O$ et $\delta = 0$, on a même:

ASSERTION II.11. $V(K_1, \Delta_1, O, 0) = B^4$.

Ce cas revient à enlever de B_1^4 une boule Δ_1^4 puis de la remettre de la même manière.

CHAPITRE III

Dans cette section, on améliore, dans des cas particuliers, les Propositions II.3 et II.11.

Notation III.0. Reprenons la boule B_1^4 et le disque Δ_1 (Chapitre I, §1). On avait $K_1 = (S_1^3, \partial\Delta_1)$, Δ_1 est localement plat dans B_1^4, $\Delta_1 \times D_1^2$ étant son voisinage tubulaire. Soit P un point de int Δ_1 et $\Delta_0^2 \subset$ int Δ_1 un disque voisinage de P dans Δ_1. $\Delta_0^2 \times D_1^2$ est voisinage de P dans B_1^4. La paire $(B_1^4 \backslash \Delta_0^2 \times D_1^2, \Delta_1 \backslash \Delta_0^2)$ est un cobordisme entre le noeud trivial $(\partial(\Delta_0^2 \times D_1^2), \partial\Delta_0^2)$ et le noeud K_1. Ce cobordisme ne dépend que de Δ_1. On le note $C(\Delta_1)$.

§1. ETUDE DE $V(O, \Delta_1, O; \delta)$

ASSERTION III.1. *Pour δ pair, $V(O, \Delta_1, O; \delta) = B^4$.*

Soit (B_0^4, Δ_0) une paire non nouée. Soit $(S^4, S^2) = (B_1^4, \Delta_1) \underset{\partial}{\cup} (B_0^4, \Delta_0)$. T_δ étant défini en (*I*, §0; 8), on a: $(S^4 \backslash S^2 \times D^2) \underset{T_\delta}{\cup} S^2 \times D^2 \simeq V(O, \Delta_1, O; \delta) \underset{\partial}{\cup} V(O, \Delta_0, O; \delta) \simeq V(O, \Delta_1, O; \delta) \underset{S^3}{\cup} B^4$ (d'après l'assertion II.9). Si δ est pair, T_δ est isotope à l'identité, le membre de gauche sera S^4, d'où $V(O, \Delta_1, O; \delta)$ sera B^4.

§2. AUTRE CONSTRUCTION DES $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$

(a) Construction de $W(C_1, C_2; A)$ [6]

Considérons deux cobordismes $C_i = (S_i^3 \times I, S_i^1 \times I)$, $i = 1, 2$. Soit $S_i^1 \times I \times D_i^2$ un voisinage tubulaire standard de C_i. $S_i^3 \times I \backslash S_i^1 \times I \times D_i^2$ est $A^4(C_i)$. Une matrice d'entiers A (de déterminant -1) définit un homéomorphisme de $S_1^1 \times \partial D_1^2$ dans $S_2^1 \times \partial D_2^2$ qui se prolonge naturellement de $S_1^1 \times I \times \partial D_1^2$ dans $S_2^1 \times I \times \partial D_2^2$. On définit $W(C_1, C_2; A)$ par $A^4(C_1) \underset{A}{\cup} A^4(C_2)$.

Remarques. (1) $W(C_1, C_2; A)$ est un cobordisme entre $M(C_1^-, C_2^-; A)$ et $M(C_1^+, C_2^+; A)$. (2) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$, on note $W(C_1, C_2; A)$ par $W(C_1, C_2; \delta)$.

(b) Autre description des V

ASSERTION III.2. $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) = W(C(\Delta_1), c(K_2); \delta) \underset{S^3}{\cup} B^4$. *Cette proposition est implicite dans* [6, *pp.* 164–65, *Remarques* 4 *et* 5]. *Elle résulte des deux remarques suivantes*:

(1) Prenons une boule B^4 et un noeud $K = (\partial B^4, S^1)$ sur son bord, ayant le même type orienté que K_2. Soit $S^1 \times D^2$ un voisinage tubulaire standard de K. On peut voir B_2^4 comme $B^4 \underset{A^3(K) \times \{0\}}{\cup} A^3(K) \times I$, S_2^1 comme S^1 et $S_2^1 \times D_2^2$ comme $S^1 \times D^2 \underset{S^1 \times \partial D^2 \times \{0\}}{\cup} S^1 \times \partial D^2 \times I$.

Ainsi, $B_2^4 \backslash B^4 \simeq A^3(K) \times I \simeq A^3(K_2) \times I \simeq A^4(c(K_2))$(voir Fig 2).

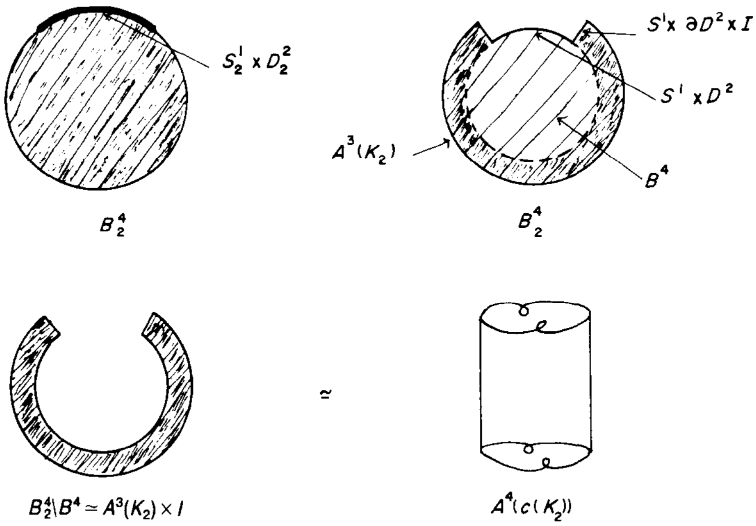

Fig. 2.

(2) Considérons $B_1^4 \backslash \Delta_1 \times D_1^2$. D'après (Chapitre III, Notation III.0):

$$B_1^4 \backslash \Delta_1 \times D_1^2 = (B_1^4 \backslash \Delta_0^2 \times D_1^2) \backslash (\Delta_1 \backslash \Delta_0^2) \times D_1^2 = A^4(C(\Delta_1)).$$

(c) Etude de $W(C_1, C_2; \delta)$

En remarquant qu'à chaque $c(O, O)$, on peut associer un $C(\Delta_1)$, les Assertions III.1 et III.2 donnent:

ASSERTION III.3. *Pour δ pair, $W(c(O, O), c(O); \delta) = S^3 \times I$.*

On peut l'améliorer en:

ASSERTION III.4. *Pour δ pair, pour C_2 cobordisme quelconque entre deux noeuds slice, pour $c(O, O)$ cobordisme quelconque entre O et lui-même, on a:*

$$W(c(O, O), C_2; \delta) = S^3 \times I.$$

Dans la démonstration, on aura besoin du:

LEMME III.5. *Pour C_2 cobordisme quelconque,*

$$W(c(O), C_2; \delta) = S^3 \times I.$$

Démonstration du lemme. Supposons $C_2 = (S_2^3 \times I, S_2^1 \times I)$ et $c(O) = (S_1^3, S_1^1) \times I$. (S_1^3, S_1^1) étant trivial, supposons $S_1^3 \backslash S_1^1 \times D_1^2 = \Delta_1^2 \times \partial D_1^2$. $A^4(c(O))$ sera $\Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I$. $A^4(C_2)$ étant $S_2^3 \times I \backslash S_2^1 \times I \times D_2^2$, on aura:

$$W(c(O), C_2; \delta) = \Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I \underset{\delta}{\cup} S_2^3 \times I \backslash S_2^1 \times I \times D_2^2,$$

où δ: $\partial \Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I \to S_2^1 \times I \times \partial D_2^2$.

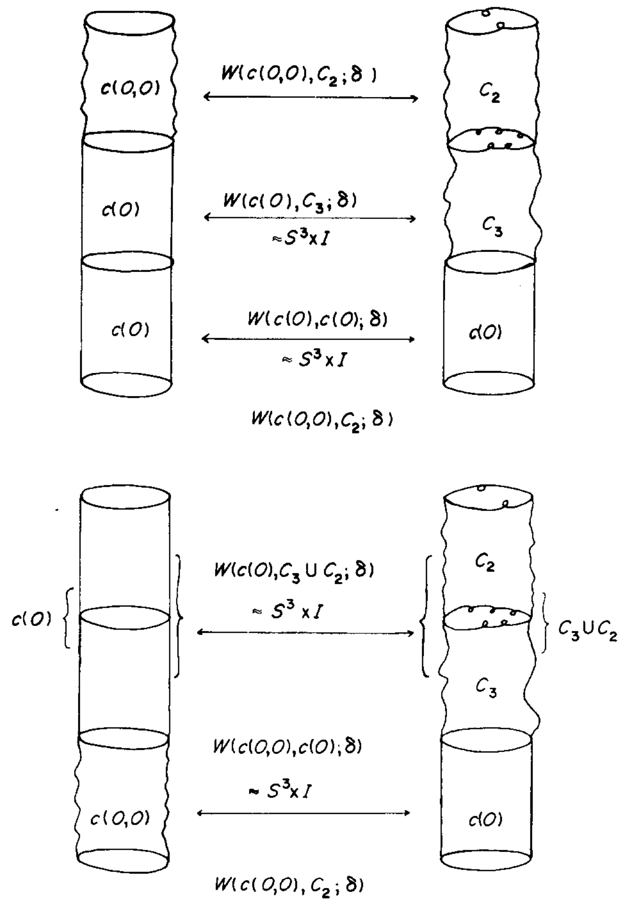

Fig. 3.

Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I \arrow[rr, "\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & & S_2^1 \times \partial D_2^2 \times I \\
& \partial\Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I. \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0"'] &
\end{tikzcd}$$

L'application $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se prolonge en un difféomorphisme sur $\Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I$ (Chapitre I, §0; 7), d'où:

$$W(c(O), C_2; \delta) = \Delta_1^2 \times \partial D_1^2 \times I \underset{0}{\cup} (S_2^3 \times I \backslash S_2^1 \times I \times D_2^2) \simeq S_2^3 \times I.$$

Démonstration de l'assertion III.4. Notre démonstration est basée crucialement sur le "geometric trick" de [6, p. 166, Fig. 1].

Conventions. Etant donné deux cobordismes $C_i = (S_i^3 \times I, S_i^1 \times I)$, pour $(i = 1, 2)$, si $C_1^+ = -C_2^-$, on note $C_1 \cup C_2$ pour $C_1 \underset{C_1^+ = -C_2^-}{\cup} C_2$. C'est un $c(C_1^-, C_2^+)$.

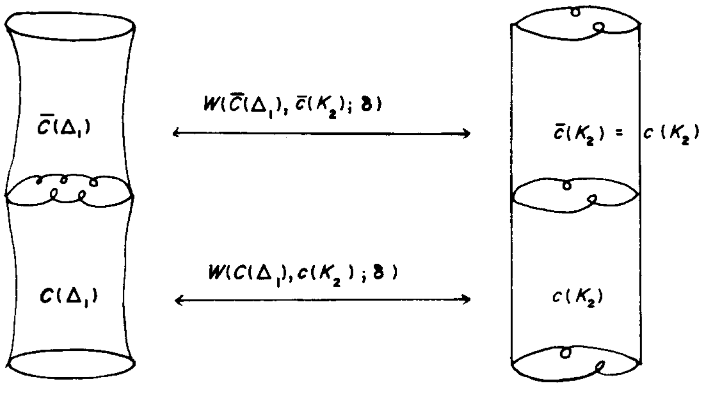

Fig. 4.

Etant donné deux variétés W_1 et W_2, si $\partial^+ W_1 = -\partial^- W_2$, on note $W_1 \cup W_2$ pour $W_1 \underset{\partial^+W_1=-\partial^-W_2}{\cup} W_2$.

(1) Considérons $W(c(O, O), C_2; \delta)$. C_2^- étant "slice", il est cobordant à O. Soit C_3 un cobordisme quelconque vérifiant $C_3^- = O$ et $C_3^+ = -C_2^-$ (voir Fig. 3).

(2) Considérons $W(c(O), c(O); \delta) \cup W(c(O), C_3; \delta) \cup W(c(O, O), C_2; \delta)$. D'une part, cette variété est $W(c(O, O), C_2; \delta)$ puisque les deux premières sont des $S^3 \times I$, d'après le Lemme III.5; d'autre part, c'est $W(c(O) \cup c(O) \cup c(O, O), c(O) \cup C_3 \cup C_2; \delta)$. Or, $c(O) \cup c(O) \cup c(O, O) = c\ (O, O) = c(O, O) \cup c(O)$.

D'où, cette variété est aussi:

$$W(c(O, O), c(O); \delta) \cup W(c(O), C_3 \cup C_2; \delta).$$

La seconde composante est $S^3 \times I$, d'après le Lemme III.5; la première l'est d'après l'Assertion III.3 (δ pair).

§3. ETUDE DE $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$

(a) Etude de $V(O, \Delta_1, K_2; \delta)$

PROPOSITION III.6. *Pour δ pair et K_2 slice, $V(O, \Delta_1, K_2; \delta) = B^4$.*

C'est une conséquence directe des Assertions III.2 et III.4.

(b) Etude de $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) \times I$

PROPOSITION III.7 [6]. *Pour δ pair et K_2 slice, $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta) \times I = I^5$.*

D'après l'hypothèse de Poincaré en dimension cinq, il suffit de prouver que $2V = S^4$.

$$2V = [B^4 \underset{S^3}{\cup} W(C(\Delta_1), c(K_2); \delta)] \underset{\partial}{\cup} [W(C(\Delta_1), c(K_2); \delta) \underset{S^3}{\cup} B^4].$$

L'application $\underset{t\to 1-t}{I \to I}$ induit une involution sur les classes de cobordisme.

Soit $\bar{C}$ l'image de C. $2V$ est aussi:

$$B^4 \underset{S^3}{\cup} W(C(\Delta_1), c(K_2); \delta) \cup W(\bar{C}(\Delta_1), \bar{c}(K_2); \delta) \underset{S^3}{\cup} B^4$$

$$= B^4 \underset{S^3}{\cup} W(C(\Delta_1) \cup \bar{C}(\Delta_1), c(K_2) \cup \bar{c}(K_2); \delta) \underset{S^3}{\cup} B^4.$$

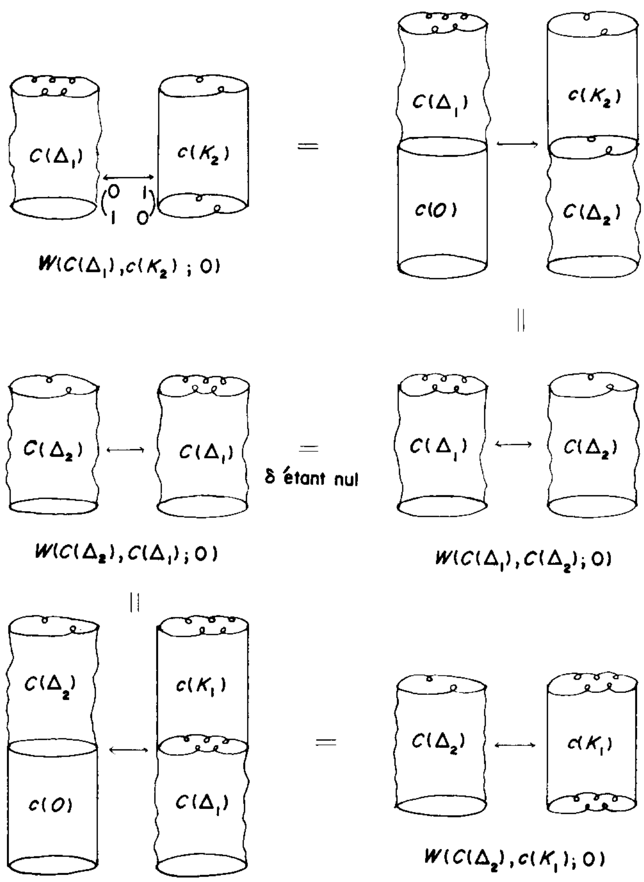

Fig. 5.

Or $C(\Delta_1)$ est un $c(O, K_1)$, d'où $\bar{C}(\Delta_1)$ est un $c(K_1, O)$ et $C(\Delta_1) \cup \bar{C}(\Delta_1)$ est un $c(O, O)$; $c(K_2) \cup \bar{c}(K_2)$ est $c(K_2)$ (voir Fig. 4). δ étant pair, $W(C(\Delta_1) \cup \bar{C}(\Delta_1), c(K_2) \cup \bar{c}(K_2); \delta)$ est $S^3 \times I$, d'après l'Assertion III.4.

(c) Etude de $V(K_1, \Delta_1, K_2; 0)$

Le bord de $V(K_1, \Delta_1, K_2; 0)$ est $M(K_1, K_2; 0)$. C'est aussi $M(K_2, K_1; 0)$. Supposons K_2 slice; on peut construire des $V(K_2, \Delta_2, K_1; 0)$. Leur bord est $M(K_2, K_1; 0)$. Les variétés $V(K_1, \Delta_1, K_2; 0)$ et $V(K_2, \Delta_2, K_1; 0)$ ont leurs bords isomorphes. Ils le sont; on a même:

Proposition III.8. *Pour K_2 slice, $V(K_1, \Delta_1, K_2; 0)$ est indépendante de Δ_1 et est isomorphe à tout $V(K_2, \Delta_2, K_1; 0)$.*

On utilise également ici le "geometric trick" de [6, p. 166, Fig. 1].

(1) $V(K_1, \Delta_1, K_2; 0) = W(C(\Delta_1), c(K_2); 0) \underset{S^3}{\cup} B^4$. Considérons $W(c(O), C(\Delta_2); 0)$. C'est $S^3 \times I$, d'après le Lemme III.5. Ainsi, $W(c(O), C(\Delta_2); 0) \cup W(C(\Delta_1), c(K_2); 0)$, c'est, d'une part $W(C(\Delta_1), c(K_2); 0)$, d'autre part, $W(c(O) \cup C(\Delta_1), C(\Delta_2) \cup c(K_2); 0)$.

Or, $c(O) \cup C(\Delta_1) = C(\Delta_1)$ et $C(\Delta_2) \cup c(K_2) = C(\Delta_2)$, puisque $C^+(\Delta_2) = K_2$.
D'où (voir Fig. 5):

$$W(C(\Delta_1), c(K_2); 0) = W(C(\Delta_1), C(\Delta_2); 0).$$

(2) De même, on a: $W(C(\Delta_2), c(K_1); 0) = W(C(\Delta_2), C(\Delta_1); 0)$.
La proposition résulte du fait que: $W(C(\Delta_1), C(\Delta_2); 0) = W(C(\Delta_2), C(\Delta_1); 0)$.

Remarque. Le (1) de la Proposition III.8 répond affirmativement à une question posée par Gordon [6, p. 165].

(d) Etude de $V(K_1, \Delta_1, K_1; 0)$

$\partial V(K_1, \Delta_1, K_1; 0)$ est $M(K_1, K_1; 0) = A^3(K_1) \underset{0}{\cup} A^3(K_1)$. Appelons X_1 le premier $A^3(K_1)$ et X_2 le second. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd} X1 \underset{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}{\cup} X_2 \arrow[d, "id"'] & \\ X_2 \underset{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}{\cup} X_1 & \end{tikzcd}$$

On a bien $id \circ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \circ id$. Il définit une involution g non triviale sur $M(K_1, K_1; 0)$, préservant l'orientation.

D'après la Proposition III.7:

$$V(K_1, \Delta_1, K_1; 0) \underset{id}{\cup} - V(K_1, \Delta_1, K_1; 0) = S^4.$$

Si on remplace dans l'attachement id par g, obtient une sphère d'homotopie. Curtis [3] se demandait si on réobtient S^4. La proposition suivante répond affirmativement.

PROPOSITION III.9. $V(K_1, \Delta_1, K_1; 0) \underset{g}{\cup} - V(K_1, \Delta_1, K_1; 0) = S^4$.

Soit
$$W = W(C(\Delta_1), c(K_1); 0),\ W' = W(C(\Delta_1), C(\Delta_1); 0),$$
$$V = W \underset{S^3}{\cup} B^4,\ V' = W' \underset{S^3}{\cup} B^4 \text{ et } M = M(K_1, K_1; 0).$$

D'après la Proposition III.8, $W \simeq W'$. Aussi, de la démonstration de la Proposition III.8, il existe un homéomorphisme $h: W \to W'$ tel que $h|M$ est l'identité. D'où, on a un homéomorphisme $f: V \to V'$ tel que $f|M$ est l'identité. Ainsi, $V \underset{g}{\cup} - V \simeq V' \underset{g}{\cup} - V'$. Mais, comme dans [6, p. 165], $g: M \to M$ s'étend en une involution $V' \to V'$. D'où $V' \underset{g}{\cup} - V' \simeq V' \underset{id}{\cup} - V' \simeq S^4$.

Remarques. (1) Les variétés $V(O, \Delta_1, K_2; \delta)$ sont contractiles de bord S^3. Sont-elles des B^4? (voir II.9 et III.6). (2) Pour K_1, K_2, δ fixés, $V(K_1, \Delta_1, K_2; \delta)$ dépend-elle de Δ_1? (voir III.8)

BIBLIOGRAPHIE

1. R. H. BING et J. M. MARTIN: Cubes with knotted holes. *Trans. AMS* **155** (1971) 217–231.
2. M. COHEN: A course in simple homotopy theory. *Graduate texts in Math.* **10** (1973).
4. M. L. CURTIS: On 2-complexes in 4-space. *Topology of 3-manifolds* (Edited by M. K. Font), pp. 204–207. Prentice-Hall, New Jersey (1962).
4. R. H. FOX et J. MILNOR: Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka J. Math.* **3** (1966), 257–267.

5. H. Gluck: The embedding of two-spheres in the four-sphere. *Trans. AMS* **104** (1962), 308–333.
6. C. McA. Gordon: Knots, homology spheres and contractible 4-manifolds. *Topology* **14** (1975), 151–172.
7. A. Gramain: Rapport sur la théorie classique des noeuds (lère partie), Sém. Bourbaki, exposé No. 485, Juin 1976. *Lecture notes in Math.* **567** (1976).
8. J. L. Gross: An infinite class of irreducible homology 3-spheres. *Proc. Am. Math. Soc.* **25** (1970), 173–176.
9. W. B. R. Lickorish: On collapsing $X^2 \times I$, Topology of manifolds. *Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens* (1969), 157–160.
10. V. Poenaru: Les décompositions de l'hypercube en produit topologique. *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), 113–129.
11. G. de Rham: Factorisations topologiques du disque à cinq dimensions. *Topologie et géométrie différentielle* **3**, *Sém.* Ehresmann (1961).
12. G. de Rham: Involutions topologiques de S^4. *Seminari* 1962–63, *Inst. Nazionale di Alta Matematica* (Edited by Cremonese), p. 725–36, Roma (1965).
13. D. Rolfsen: Knots and links. *Mathematical Lecture Series*, Vol. 7. Publish or Perish (1976).
14. J. H. C. Whitehead: Simplicial spaces, nuclei and m-groups. *Proc. Lond. Math. Soc.* **45** (1939), 243–327.
15. E. C. Zeeman: On the dunce hat. *Topology* **2** (1964), 341–358.

Centre d'Orsay, Paris
Mathématiques Bât 425,
91405, *Orsay, France*
(Attaché au CNRS Libanais)